Yönetim, Yıl: 18, Sayı: 56, Şubat 2007

STOKASTİK (R,s,S) ve STOKASTİK (R,S) STOK KONTROL POLİTİKALARININ POLİÜRETAN SEKTÖRÜNDE MARKOV KARAR SÜRECİ YARDIMIYLA KARŞILAŞTIRILMASI

Doç. Dr. Necdet ÖZÇAKAR

Arş. Grv. İbrahim Zeki AKYURT

İstanbul Üniversitesi - İşletme Fakültesi

Üretim Yönetimi Anabilim Dalı

Bu çalışmada, olasılıklı stok politikaları tanıtılarak bunlardan periyodik gözden geçirmeye dayalı (R,s,S) stok politikasının Markov zinciri ve Markov karar süreci özelliği taşıdığı ispatlanmış, ardından bu politika; benzer özellikleri taşıyan (R,S) stok politikasıyla maliyetler açısından karşılaştırılmıştır. Türkiye'de poliüretan alanında faaliyet gösteren uluslar arası bir firmanın MDI (Metilendifenil Diizosiyanat) hammaddesine ait verileri toplanmış ve bu stok kalemine ait talebin olasılıklı yapısı incelenmiştir. (R,s,S) stok politikasına uygun biçimde, durum uzayı tanımlanarak ve geçiş olasılıkları hesaplanarak Markov zinciri oluşturulmuştur. Bu politika, stok kaleminin maliyet fonksiyonu ile Markov karar problemi olarak gösterilmiş ve birim zamanda beklenen ortalama maliyet bu doğrultuda bulunmuştur. Ardından firmanın stok politikası olan (R,S) modeline aynı işlemler uygulanarak, maliyetler karşılaştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Stokastik Stok kontrolü, (R,s,S) politikası, (R,S) politikası, Markov zinciri, Markov karar süreci, Poliüretan, Metilendifenil Diizosiyanat.

COMPARISON of STOCHASTIC (R,s,S) and STOCHASTIC (R,S) INVENTORY POLICIES in POLYURETHANE SECTOR ACCORDING to the MARKOV DECISION PROCESS

In this study, probabilistic inventory policies are introduced and it has been proved that the (R,s,S) inventory policy based on periodical revision shows Markov chain and Markov decision process characteristics. Thereafter, this policy has been compared with the (R,S) inventory policy which has similar features with the mentioned inventory policy, in terms of costs. The data of an international firm which operates in Turkey in the area of polyurethane, related to the raw material of MDI (methylenediphenyl diisosiyanathe) has been collected and the probabilistic structure of the demand related to this inventory item has been analyzed. The state space has been defined according to the (R,s,S) inventory policy, and the Markov chain has been formed by calculating the probabilities of transition. This policy has been shown as a problem of Markov decision, with the cost function of inventory item, and the expected avarage cost for a time unit has been found. Lastly, same processes have been applied to the (R,S) model which is the actual inventory policy of the mentioned firm, and the costs have been compared.

Key Words: Stochastic inventory control, (R,s,S) policy, (R,S) policy, Markov chain, Markov decision process, polyurethane, methylenediphenyl diisosiyanathe.

GİRİŞ

İşletmeler, hayatın her safhasında olduğu gibi sürekli olarak karar problemleriyle karşı karşıyadırlar. Karar verme; belirli (deterministik), riskli (stokastik - olasılıklı) ve belirsiz ortamlar içinden herhangi birinde gerçekleştirilir. Çalışmada gerçeğe en yakın olan riskli ortam baz alınmıştır. Riskli ortamın varlığı, birden çok durumun var olmasına, bu durumların gerçekleşme olasılıklarının tam olarak belirlenebilmesine bağlıdır (Baray, 1993; 2). Yönetici, amaca ulaşmak için bu durumlara ait alternatif hareketler arasından rasyonel olanını seçerek karar verme işlemini gerçekleştirmiş olur. Tabii ki bu işlemi gerçekleştirirken, uygun verilerin toplanması ve bunların iyi bir şekilde analiz edilmesi gerekmektedir. Ardından optimum hareket tarzının seçilerek bir karar alınması ve benzer davranışlar için politika oluşturulması da mümkün olmaktadır.

Üretim işletmeleri için stok sistemlerinin belirlenmesi ve stok kontrol politikalarının oluşturulması her aşamada önem taşımaktadır. Bu politikaların temel amacı; gereksinimleri karşılayacak stok miktarlarının, üretimi aksatmadan ve müşteriyi bekletmeden optimum maliyetle elde bulundurulmasıdır. Mamul stoğu, üretimde olan yarı mamul stoğu, işlenmemiş hammadde stoğu hatta tamir ve bakım için gerekli olan yedek parça stoğu gibi farklı amaçlara hizmet eden stok kalemlerine yönelik farklı stok politikalarının oluşturulması gerekmektedir. Çalışmada, iki farklı stok kontrol politikası, işlenmemiş bir hammadde üzerinde incelenmiştir.

Stok kontrol politikasının belirlenmesi sadece üretim işletmeleri için değil tedarik zincirindeki tüm işletmeler için de önemli bir konudur. Zincirin optimizasyonunun bir ayağı da her aşama için, hangi stok kontrol politikası oluşturulacağı kararının verilmesidir. İşletmeler gereğinden fazla stok taşımak istemediklerinden karar verici, her bir stok kalemi için ne zaman ve ne kadar sipariş verilmesi gerektiğini belirleyerek stok kontrol modelini kurar. Modelin kuruluşu esnasında öne çıkan iki hedefi gerçekleştirmek ise zaruridir. İlk hedef, stoklanan mal miktarının en düşük düzeyde kalmasını sağlamak, ikinci hedef sipariş maliyetini minumum kılacak biçimde sipariş vermektir. Tabii ki iyi bir stok yönetimi, bu maliyetlerin yalnızca en küçüklenmesi olarak düşünülemez. Bunların dışında, belirli bir dönemin (periyodun) başında siparişi verilen stok kalemi, kendisine olan talebi karşılayamadığı zaman stok tükenmesi ortaya çıkar. Stok tükenmesi hammadde ile ilgiliyse üretim durur, bu da çalışanların ve makinelerin atıl kalmasına yani maliyete yol açar. Stok tükenmesi mamul ile ilgiliyse, ya talep bekletilir ya da müşteri kaybedilir. Burada oluşan maliyet ise potansiyel satışların getirisinin kaybı ile ortaya çıkar. Kısacası iyi bir stok yönetimi, hem maliyetleri düşürmeyi hem de kârı arttırmayı hedeflemelidir. Bu hedef doğrultusunda yapılan çalışmalarda stok kontrol modelleri bulunmuş ve kullanım alanları incelenmiştir. İlk olarak Wilson 1934 yılında kendi adıyla anılan tarihteki ilk stok kontrol modelini önermiştir. Sabit sipariş miktarının esas alındığı bu modelin üzerine birçok çalışma yapılarak farklı koşullar için farklı stok modelleri geliştirilmiştir. Bu türdeki modellerin dışında oluşturulan bir diğer stok kontrol modeli ise periyodik gözden geçirme modelidir (Sabit Sipariş Periyodu Sistemi). Bu modele göre stok sayımı veya gözden geçirme, belirli zaman aralıklarında yapılmaktadır. Genelde stok periyodik olarak veya sürekli olarak gözden geçirilir. Sürekli kontrole tabi bir kalem; barkod gibi sistemler yardımıyla her an miktar yönünden bilinmektedir ve bu yüzden yeniden sipariş noktasına gelindiğinde sipariş verilir. Periyodik gözden geçirmede ise her periyodun sonunda stok miktarına bakılır ve sipariş verilip verilmeyeceği eğer verilecekse ne kadar verileceği kararı alınır. Çalışmada ele alınan stok kontrol modeli periyodik gözden geçirmeye dayanmaktadır.

Bir diğer konu ise talebin yapısının incelenmesidir. Müşteri taleplerinin kesin olarak bilinmesi durumunda stok kontrol modeli deterministik, tersine durumda ise stokastik olarak adlandırılır. Stokastik bir modelde talep periyottan periyoda değişiklik gösterecektir; bu durumda, bulundurulan stok miktarının değişken yapıdaki talebi karşılaması beklenir. Markov zincirleri de bu tip dinamik yapılı problemlerin modellenmesindeki araçlardan birisidir.

Markov zincirleri ,1907 yılında A. A. Markov tarafından ortaya konmuştur. Literatürde Markov zincirleri birçok çalışmaya konu olmuştur (Taylor& Karlin,1984; Papoulis,1984; Doob, 1990; Hillier & Lieberman, 2000; Ross, 2003). Yapılan bu çalışmalarda, stok sistemini zincire uygun biçimde modelleme, stok seviyesini belirleme, üreticilerin üretim programlama ve planlama gibi risk altındaki durumları incelenmiştir. Markov zincirleri ayrıca kuyruk sistemlerinin tasarımı, optimizasyonu ve kontrolünde, üretim süreçlerinde, haberleşme ağlarında, güvenilirlik çalışmaları gibi alanlarda da kullanılmaktadır.

Markov karar süreci, stok problemlerinde en uygun politikayı belirlemeye yönelik çalışmalarda kullanılmaktadır. Lin, Yiu ve Johnson (2002), çalışmalarında stok kalemine ait, uzun dönemli beklenen maliyeti minimum kılan ve Markov süreci özelliği gösteren bir politikaya, dinamik programlamaya dayanarak ulaşmışlardır. Taha(2002), eserinde, Markov sürecine uyan sonsuz aşamalı bir modelin çözümünde; ayrıntılı sayma yöntemi, dinamik programlamaya dayalı politika yineleme yöntemi ve doğrusal programlama ile çözüm yöntemini kullanmıştır. Bu çalışma dahilinde sabitlenmiş (R,s,S) ve (R,S) politikalarının beklenen maliyetleri karşılaştırıldığından ayrıntılı sayma yöntemini kullanmak sakıncalı olmayacaktır.

1. STOK KONTROL MODELLERİ

Talebin belirli olduğu deterministik modeller, gerçek üretim ve dağıtım durumlarına uygun olmadığından, daha gerçekçi olan talebin durumunun net olarak bilinmediği olasılıklı modelleri incelemek yarar sağlayacaktır.

Karar verici, hangi modelin tercih edileceğinin seçimine geçmeden, stok kaleminin ehemmiyetini göz önüne almalıdır. Bu ise stoklar ABC tipi sınıflandırmaya tabi tutularak yapılabilir. A tipi stok kalemleri, işletme için en önemli olup tüm stoğun %20'sini meydana getirmekte, bunun yanında satış hacmininse %80'ini oluşturmaktadır. B tipinin, stoğun %30'unu, satış hacminin ise %15'ini; C tipinin de stoğun %50'sini ve satış hacminin ise %5'ini oluşturduğu söylenebilir (Silver, Pyke ve Peterson; 1998: 236). Tabii ki bu sınıflandırmanın amacı şirketin çabalarını en iyi sonuçların elde edileceği yöne yöneltmektir (Öztürk, 2004: 516).

Wilson'un formüle ettiği, klasik Ekonomik Sipariş Miktarı modelinin üzerine birçok çalışma yapılmış ve değişik stok kontrol modelleri ortaya çıkarılmıştır (Lin, Yiu ve Johnson; 2002,1401).

Aşağıda belirtilen stokastik stok modellerindeki ayrım; sipariş noktası, sipariş miktarı, stoğun gözden geçirme zamanı gibi unsurlar göz önünde bulundurularak yapılmıştır. "s" Yeniden sipariş noktasını, "Q" sabit sipariş miktarını, "R" stok kontrol-yeniden gözden geçirme-zamanını, "S" en yüksek stok düzeyini göstermektedir.

- (s,Q) Kontrol Modeli

"Sipariş-noktası, sipariş-miktarı" olarak anılan bu yöntemde, stoğun kontrolü süreklidir (R=0). Sabit miktardaki Q birim, *stok düzeyi* s veya altına indiğinde sipariş edilir (Silver, Pyke ve Peterson; 1998: 237).

- (s, S) Kontrol Modeli

Bu kontrol modelinde de aynı (s,Q) modelinde olduğu gibi stok düzeyi, s noktasının altına indiğinde sipariş verilir. Yine aynı şekilde sürekli gözlem söz konusudur. Ancak, sipariş miktarı değişkendir çünkü S düzeyine çıkana kadar sipariş verilir.

- (R,S) Kontrol Modeli

Bu yöntem genelde bilgisayar ortamında, stoğa ait anlık kayıtlarını tutmayan ve malzemeyi aynı tedarikçiden alan firmalar tarafından kullanılmaktadır. Her stok kontrolü belli bir zaman diliminin ardından gerçekleşir. Her gözlem noktasında sipariş, stok S birime kadar yükseltilecek miktarda verilerek stok ikmali yapılır.

- (R, s, S) Kontrol Modeli

Her R birim zamanda stok kontrol edilir, eğer stok düzeyi s birimin altında ise S birime kadar sipariş verilir, s birimin üzerinde ise sipariş verilmez. Bu model (s,S) ve R,S) sistemlerinden oluşmuş bir kombinasyondur. (s, S) sisteminin R=0 veya (R,S) sisteminin s=S-1 halidir (Silver, Pyke ve Peterson; 1998: 237). Tek ürünlü stok sistemlerinde belli varsayımlar altında bu yöntemin, ikmal, sipariş ve stok azalması maliyetleri yönünden diğer yöntemlere göre daha üstün olduğu söylenebilir (Zheng ve Federgruen; 1991: 654).

(R,s,S) stok kontrol modelindeki s ve S gibi sınırların tespiti için birçok yöntem kullanılabilir. Zheng ve Federgruen (1991) talebin kesikli dağıldığı durumlarda kullanılabilecek yeni ve basit bir algoritma geliştirmişlerdir. Bu algoritma dışında ise kullanılan diğer yöntemler genelde sezgiseldir (Silver, Pyke ve Peterson; 1998: 336-341). Ehrhardt (1979 ve 1984) optimum değerlerin bulunması için sezgisel bir yöntem keşfetmiş, ardından bu yöntemi sipariş süresinin rassal dağılması durumunda incelemiştir. Schneider (1978) ise belli hizmet düzeyinde yeniden sipariş noktasını incelemiştir.

Bu dört stokastik stok politikasıyla, ABC tipi sınıflandırma da göz önüne alındığında; A tipi stok kalemleri için (s,S) ve (R,s,S); B tipi stok kalemleri için (s,Q) ve (R,S) stok kontrol politikaları daha uygun olmaktadır (Silver, Pyke ve Peterson; 1998: 241).

2. MARKOV KARAR SÜRECİ

Genel anlamda Markov karar süreci incelendiğinde optimum politikanın belirlenebilmesi için her politikayı oluşturan kararların ve bu karar anında seçilecek hareketin belirlenmesi gerekir. Daha önce açıklanmış olan tüm stok kontrol modelleri gerçekte birer politika iken, bu stok modellerinde, stok düzeyinin hangi durumda iken ne kadara çıkarılacağı veya ne kadar sipariş verileceği hakkında oluşturulmuş tüm belirlemeler, o politikaya ait kararları oluşturmaktadır. Bu çalışmada yeni bir model (politika) kurarak problemi bu şekilde optimum kılma hususu ele alınmamış, periyodik gözden geçirmeye dayalı (R,s,S) ve (R,S) stok kontrol modelleri *birim zamanda beklenen ortalama maliyet* hesabı yönünden karşılaştırılarak hangisinin daha iyi sonuç verdiği üzerinde durulmuştur.

2.1. Markov Zinciri ve Durum Uzayı

Rassal değişkenlerin oluşturduğu sürecin, gelecekteki durumuna ilişkin olasılık değeri, bilinen mevcut duruma bağlı ve önceki durumların bilinmesini gerektirmeden bulunabiliyorsa bu model Markov zinciri özelliği taşımaktadır (Taylor ve Karlin, 1984; 67). Yani Markov zinciri bir stokastik süreçtir ve sürecin gelecekteki davranışı yalnızca şimdiki durumdan etkilenir; önceki durumlara bağlı değildir (Saldana ve Changho, 2000: 204).

Bir stokastik kesikli-durum süreci; bu süreçte bir sonraki durum yalnızca mevcut duruma bağlıysa, daha önceki durumlarla ilişiği yoksa, Markov zinciri olarak anılır. Bu zincir; iki ardışık durum arasındaki zaman; üssel dağılmışsa Sürekli-Zaman Markov Zinciri, geometrik dağılmışsa Kesikli-Zaman Markov Zinciri olarak adlandırılır (Dayar, 1994: 2).

Zincirin tüm mümkün değerleri negatif olmayan tamsayılarla sembolize edilmiştir. Burada $X_t=i_t$ ise:

$$P\{X_{t+1}=i_{t+1} | X_t=i_t, ..., X_0=i_0\} = P\{X_{t+1}=i_{t+1} | X_t=i_t\} \quad \mathbf{1}$$

şeklinde gösterilen denklem Markov zinciri olacaktır. Burada, bir sonraki zamanda oluşacak durum, yalnızca şimdiki zamandan yani X_t durumundan etkilenecek; geçmiş zamanlardaki durumlardan tamamen bağımsız olacaktır (Ross, 2003: 181).

$n \geq 1$ olmak üzere n periyot boyunca gerçekleşen toplam talep olasılıklı olacağından, toplam talep $\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...\xi_n$ şeklinde rassal değişkenleri oluşturacaktır. Bu rassal değişken ξ_n'i k notasyonuyla ifade ettiğimizde, k'nın gerçekleşme olasılığı Denklem 2'deki gibi olacaktır. Bu denklemde *n.* periyottaki talebin *k* miktarı kadar olma olasılığı gösterilmiştir.

$$a_k = P(\xi_n = k), \quad k = 0,1,2,3,4......... \quad \mathbf{2}$$

(R,s,S) modeline göre, kontrolü yapılan zaman noktası (t_n), $t_n = nR, n \geq 1$ olarak gösterilebilir.Bu da kesikli zamanı ifade eder. Dönem içinde gerçekleşen talep sonunda, stok düzeyi belli olacak, yani gerçekleşen k miktardaki talep, bir sonraki dönemin başındaki $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ şeklinde ifade edilen stok düzeyini belirleyecektir. Dolayısıyla x_n de ξ_n gibi rassal değişken olacaktır. Stok düzeyi x_n, sipariş noktası s'den büyük , küçük ya da eşit olabilir. Eşit veya küçük olduğunda stok düzeyinin S miktarına ulaşacak kadar sipariş verilir.

Sonuçta, stok düzeyi x_{n+1}, x_n'in ne olduğuna göre değişecektir (Denklem 3).

$$x_{n+1} \begin{cases} (S - \xi_{n+1}) & X_n \leq s, \\ (X_n - \xi_{n+1}) & X_n > s \end{cases} \quad \mathbf{3}$$

Bu denklem, yöneticinin karar anındaki hareketini belirleyecek; x_{n+1}'in ne olduğunu bilmek sipariş vermeyi veya vermemeyi doğuracaktır. O dönem içindeki toplam talep, dönemin stok düzeyini belirler, eğer bir önceki dönem sipariş verildiyse stok düzeyi $x_{n+1} = (S - \xi_{n+1})$ olacaktır, eğer sipariş verilmediyse de o dönem *s*'den büyük bir miktar olan x_n'den stok açılır ve yine ξ_{n+1} kadar gerçekleşen talep sonunda karar anında stok düzeyi $x_{n+1} = (X_n - \xi_{n+1})$ olur. Sonuçta x_{n+1} rassal değişkeni ise x_n ve ξ_{n+1}'e bağlı olarak değişmektedir. Burada ξ_{n+1}'in zamandan bağımsız olduğu görülmektedir. Yani talep zamandan etkilenmemektedir. Stok düzeyini gösteren x_n rassal değişkeni durum olarak tanımlandığında, bir sonraki durum da ancak bir önceki durumdan etkileneceğinden bahsi geçen (R,s,S) stok kontrol modeli, Markov zinciri özelliği gösterecektir.

2.2. Geçiş Olasılıkları

Stok durumunun kontrolünün yapıldığı zaman noktasında (t_n), $t_n = nR, n \geq 1$, stok düzeyini ifade eden x_n=*i* olduğunda, *i*'nin değerine bağlı olarak gerçekleşen talep miktarı ξ_{n+1}'den sonra x_{n+1} belirecektir. Tabi ki stok düzeyi x_n iki şekilde olabilir, ya *0* ile *s* arasındadır ya da *s*'den büyük ve *S*'ye kadardır. *j*; bir dönem sonraki x_{n+1}'dir, yani *n+1* dönemindeki stok düzeyini belirtmektedir.

2.2.1. n periyot sonundaki stok düzeyi, 0 ile s arasında ise, n. periyotta sipariş verilmiş ve stok düzeyi *n+1* periyodunun başında S kadar oluşmuştur. *n+1* periyodundaki talep miktarı ξ_{n+1} 'nın değeri ise *j* 'yi etkileyecektir. Markov geçiş matrisinin yazılabilmesi için *i*= x_n durumundan *j*= x_{n+1} durumuna geçişin şartlı olasılığının bulunması gerekmektedir. Bunun sonucunda geçilen durum *j*; ya *0* olacaktır, ya da *0* 'dan büyük ve *S* 'ye kadar olacaktır.

- *n+1.* periyodun talebi (ξ_{n+1}), olabilecek maksimum stok düzeyi kadar veya bu sayıdan yüksekse, *j* 'nin değeri *0* olacaktır. O takdirde *i* 'nin; *0* ile *s* arasındaki bir değer olan x_n olduğu durumda, *j*'nin *0* olma koşullu olasılığı, *y*; ancak ve ancak, o periyodun talebi ξ_{n+1}=*k*'nin, *S* veya daha çok olmasıyla gerçekleşir. O zaman *S* veya daha çok talep olma olasılıklarının bulunması ve ardından bu olasılıkların hepsinin toplanması, belirtilen şartlar altında, *i*=x_n durumundan *j=0* durumuna geçişinin koşullu olasılığını verecektir (Denklem 4).

$$P(X_{n+1}=0|X_n=i)=P(S-\xi_{n+1}\leq 0)=P(\xi_{n+1}\geq S)=\sum_{k=S}^{\infty}\alpha_k \quad (4)$$

- periyodun talebi (ξ_{n+1}), *0* veya *S* birime kadarsa, x_{n+1} kesinlikle *0* olmayacaktır, o takdirde x_{n+1}=*j; 0*'dan büyük olacak fakat *S*'ye kadar olacaktır. Yani *j=1, 2 ..., S* olabilir. Örneğin *j*'nin 1 olabilmesi için ξ_{n+1}'in *S-1*, *2* olabilmesi için *S-2*, *3* olabilmesi içinse *S-3* ve *S* olabilmesi içinse *S-S=0* olması gerekecektir. Bu takdirde olabilecek talep 0, 1, 2 ,3 ....S-1 kadardır. Kısacası *j=S-*ξ_{n+1}'dir. Herhangi bir *j*=x_{n+1} değerinin *i*=x_n durumundan sonraki şartlı olasılığı, *S-j* sayıdaki talebin bulunması ile ortaya çıkacaktır. Örneğin *i=5 S=22 s=7* ise *j*'nin 12 olma olasılığı; 22-12=10 birim talep olma olasılığının bilinmesiyle olacaktır. Çünkü dönem başındaki stok miktarı, 7 birimin altında olduğundan, stok kaleminden 17 birim sipariş verilerek stok düzeyi 22 birime çıkarılmıştır.Dönemin sonundaki stok miktarının 12 birim olması için dönem talep miktarının 10 birim olarak gerçekleşmesi gerekmektedir. O taktirde dönem içindeki talep miktarının gerçekleşme olasılıkları, stok miktarlarındaki geçiş olasılıklarını verecektir. Genel gösterimi de Denklem 5 'deki gibi olacaktır.

$$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=P(S-\xi_{n+1}=j)=P(\xi_{n+1}=S-j)=\alpha_{S-j} \quad (5)$$

2.2.2. n periyot sonundaki stok düzeyi, s ile S arasında ise, n. Periyodun sonunda sipariş verilmemiş ve stok durumu *n+1* döneminin başında yine *i* kadar oluşmuştur. Markov geçiş matrisinin oluşturulabilmesi için, *j*'nin *0*, *0* ile *i* ve *i*'den büyük *S*'den küçük olabilecek durumlarını incelemek gerekecektir.

- *J*'nin *0* olabilmesi için, periyodun talebi ξ_{n+1} veya *k*'nin *i* kadar veya daha çok olması gerekmektedir. O takdirde *n+1* periyodundaki *i* veya daha çok talep miktarının gerçekleşme olasılıklarını bulup hepsini toplamak *j=0* koşullu olasılığını verecektir (Denklem 6).

$$P(X_{n+1}=0|X_n=i)=P(i-\xi_{n+1}\leq 0)=P(\xi_{n+1}\geq i)=\alpha_k \quad (6)$$

- *J*'nin *i* ile *0* arasında olma olasılığı, ξ_{n+1}'nin *0* veya *i-1* olması ile gerçekleşir.*j=i-*ξ_{n+1} olacaktır. Örneğin, *s=12, S=30, i=16* ise *j=5* olma olasılığı için, ξ_{n+1}=*11* olma olasılığının bulunması, yani *i-j* sayıda talep olma olasılığının bulunması gerekir (Denklem 7).

$$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=P(i-\xi_{n+1}=j)=P(\xi_{n+1}=i-j)=\alpha_{i-j} \quad (7)$$

- *J*'nin *i*'den büyük olma olasılığı sıfırdır, çünkü periyodun başında sipariş verilmemiştir, ξ_{n+1} sıfır dahi olsa *j* yine *i*'den büyük olamaz, bu olasılığın hesabı anlamsızdır ve Denklem 8'de gösterildiği gibi sıfıra eşittir.

$$P(X_{n+1}=j|X_n=i)=0 \quad (8)$$

2.3. Geçiş Matrisinin Yazılması

Markov geçiş matrisi *Pij*'lerden oluşmaktadır, yani *i* durumundan, *j* durumuna geçişlerin şartlı olasılıklarını vermektedir. Bu olasılıklar, Denklem 5, 6, 7 ve 8'den alınarak Denklem 9'daki gibi olacaktır.

$$Pij\begin{cases}\sum_{k=S}^{\infty}\alpha_k & 0\leq i\leq s \ ve\ j=0\\ \alpha_{S-j} & 0\leq i\leq s \ ve\ 1\leq j\leq S\\ \sum_{k=i}^{\infty}\alpha_k & s+1\leq i\leq S \ ve\ j=0\\ \alpha_{i-j} & s+1\leq i\leq S \ ve\ 1\leq j\leq i\\ 0 & s+1\leq i\leq S \ ve\ j\geq i+1\end{cases} \quad (9)$$

Buradan çıkarılacak geçiş matrisi Şekil 1'de gösterilmiştir. Her satır toplamı 1'e eşit olacağından ve sınırlı ve kesikli durum söz konusu olacağından bu matris kararlı bir yapı haline girecektir.

$$
\begin{array}{c|cccccc|cccc}
 & 0 & 1 & 2 & \cdots & s-1 & s & s+1 & \cdots & S-1 & S \\
0 & \sum_{k=S}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{S-1} & \alpha_{S-2} & \cdots & \alpha_{S-s+1} & \alpha_{S-s} & \alpha_{S-s-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \\
1 & \sum_{k=S}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{S-1} & \alpha_{S-2} & \cdots & \alpha_{S-s+1} & \alpha_{S-s} & \alpha_{S-s-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \\
2 & \sum_{k=S}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{S-1} & \alpha_{S-2} & \cdots & \alpha_{S-s+1} & \alpha_{S-s} & \alpha_{S-s-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
s-1 & \sum_{k=S}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{S-1} & \alpha_{S-2} & \cdots & \alpha_{S-s+1} & \alpha_{S-s} & \alpha_{S-s-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \\
s & \sum_{k=S}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{S-1} & \alpha_{S-2} & \cdots & \alpha_{S-s+1} & \alpha_{S-s} & \alpha_{S-s-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 \\
\hline
s+1 & \sum_{k=s+1}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{s} & \alpha_{s-1} & \cdots & \alpha_{2} & \alpha_{1} & \alpha_{0} & \cdots & 0 & 0 \\
s+2 & \sum_{k=s+2}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{s+1} & \alpha_{s} & \cdots & \alpha_{3} & \alpha_{2} & \alpha_{1} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
S-1 & \sum_{k=S-1}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{S-2} & \alpha_{S-3} & \cdots & \alpha_{S-s} & \alpha_{S-s-1} & \alpha_{S-s-2} & \cdots & \alpha_0 & 0 \\
S & \sum_{k=S}^{\infty}\alpha_k & \alpha_{S-1} & \alpha_{S-2} & \cdots & \alpha_{S-s+1} & \alpha_{S-s} & \alpha_{S-s-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0
\end{array}
$$

Şekil 1: (R,s,S) Stok Politikasına Ait Stok Düzeyindeki Değişimi Gösteren 1 Dönemlik Geçiş Matrisi

2.4. Kararlı Hal

Küçültülemez bir ergodik Markov zinciri için durum uzayını gösteren $\pi = [\pi_1, \pi_2, ..., \pi_s]$ verildiğinde $\lim_{n\to\infty} P^n$ Denklem 10'daki gibi olacaktır (Winston, 2004: 934). Bu denklemden de Denklem 11 yazılabilir (Ross, 2003: 200).

$$
\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \pi_s \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \pi_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \pi_s \end{bmatrix} \tag{10}
$$

$$
\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n \tag{11}
$$

$\pi = [\pi_1, \pi_2, ..., \pi_s]$ şeklinde verilen vektör, kararlı-hal dağılımı veya denge dağılımı olarak adlandırılır (Medhi, 2003: 5). Sonuçta, uzun dönemli dönemleri ifade eden geçiş matrisi Denklem 12'de gösterildiği gibi aynı değerlere ulaşacaktır.

$$
\begin{aligned}
\pi_j &= P_{ij}^n = P_{ij}^{n+1} \\
P_{ij}^{n+1} &= P_{ik}^n p_{kj} \\
\pi_j &= \sum_{k=1}^{k=s} \pi_k p_{kj} \\
\pi &= P.\pi
\end{aligned} \tag{12}
$$

Denklem 12'ye ait sonsuz sayıda sonuç elde edilebilir, kararlı-halin tek ve negatif olmayan değerlerine ulaşabilmek içinse $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_s = 1$ olacak şekilde Denklem 13'ü sağlamalıdır (Ross, 2003: 201).

$$\sum_{j=o}^{\infty} \pi_j = 1 \qquad \mathbf{13}$$

2.5. Markov Karar Süreci Uyumu

Markov karar süreci, 5 öğeden oluşmaktadır. Bunlar; kararın verileceği tarih (an), durumlar, eylem (hareket), geçiş olasılıkları ve verilen kararın karşılığıdır (Puterman, 1994: 17).

Kararların tümü karar tarihinde verilir. Karar tarihini ifade eden, pozitif değerli T ifadesine ait küme; sürekli veya kesikli; sonlu veya sonsuz olabilir. Kesikli zaman söz konusu olduğunda zaman; periyotlara bölünmüştür. (R,s,S) stok modeli, kontroller R periyodunda yapıldığından kesikli zamanı göstermektedir.

Sistem, her karar tarihinde M ile ifade edilen durumlara ait kümeden i gibi bir duruma ulaşır.

İçinde bulunduğu i durumundayken de, gerçekleştirebileceği A_i ile ifade edilen, mümkün eylemlerden biri seçilir. A_i ve M zaman ile değişmezler, sabittirler. A_i de sonlu, sonsuz veya kesikli kesiksiz diye ayrılabilir. Yine (R,s,S) stok modelinde A_i hem kesikli hem de sonludur.

t karar tarihinde ve i durumundayken seçilen $a \in A_i$ eyleminin sonunda, $r_t(i,a)$ ile ifade edilen beklenen karşılık alınır. Bir sonraki karar tarihi $t+1$'e ait oluşabilecek durumların olasılık dağılımı ise; $p_t(..|i,a)$ ile gösterilebilir. r pozitif olursa kazanç, negatif olursa maliyet olacaktır. Yine çalışmanın konusu olan stok modelinde kazanç değil maliyetler ele alınmıştır.

Gerçekleşecek karşılık, sistemin $t+1$ anındaki durumuna bağlıysa, $r_t(i,a,j)$ ile ifade edilir. Bu takdirde $r_t(i,a)$, yani t anındaki beklenen değer Denklem 14'te gösterilmiştir. Denklemdeki $p_t(j|i,a)$ ifadesi *geçiş olasılıkları fonksiyonu* olarak adlandırılır. Denklem 13'ten ötürü de toplam olasılık bire eşit olmalıdır.

$$r_t(i,a) = \sum_{j \in S} r_t(i,a,j) p_t(j|i,a)$$

$$\sum_{j \in S} p_t(j|i,a) = 1 \qquad \mathbf{14}$$

Sonuçta, $\{T, M, A_i, p_t(j|i,a), r_t(i,a)\}$ ifadelerinden oluşan karar sürecine Markov Karar Süreci denmektedir. Buradaki Markov ismi, geçiş olasılıklarının ve karşılıkların yalnızca bir önceki duruma bağlı olmasından ötürüdür, her stokastik karar sürecinin Markov özelliği göstermesi beklenemez.

Markov zinciri özelliği gösteren (R,s,S) stok politikası, yöneticinin her t tarihinde $a \in A_i$ gibi bir hareketi seçerek bir karar vermesi gerektiğinden ve bu karardan ötürü de bir maliyet unsuruyla karşılaştığından bu politikanın bir Markov Karar Süreci politikası olduğu görülür. Bu şekildeki bir politika hem durağan hem de deterministiktir (Hillier ve Liberman, 1057: 2001).

(R,s,S) stok kontrol modelini R_b ile ifade edilen optimum politika olduğunda, $d_i(R)$ de bu politika dahilinde i durumundayken alınan kararı gösterir. Bu modelde $a \in A_s$ gibi hareket (eylem) seçilebilir. Bu hareketler; stok düzeyini, S seviyesine kadar çıkaracak siparişi vermek veya hiç sipariş vermemektir. Bu söylenenler Tablo 1 ve Tablo 2'de açıkça görülebilir. Tablo 1'den karar sayısının *S-s+1* adet olduğu görülmektedir. R_b politikası dahilindeki kararların hangi hareketle açıklandığı ise Tablo 2'deki gibidir. Örneğin, sistem *0* durumunda ise stok düzeyi sıfır birimdir ve alınacak karar *K* kararıdır, *K* kararı ise *S* birim sipariş verilmesi gerektiği hareketini göstermektedir. Bu kesin bir karardır, yani bu durum için farklı bir hareket tarzı yoktur. Diğer durumlarda da kararlar bu şekilde olduğundan tüm bu kararların toplamı bir politika oluşturmaktadır. Çalışmanın konusu da (R,s,S) stok politikasının üzerine olacağından optimum politika olarak kabul edilmektedir.

Tablo 1: (R,s,S) Stok Politikasına Ait Kararlar

Politika	Tanımı	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$	……	$d_{s-1}(R)$	$d_s(R)$	$d_{s+1}(R)$	$d_{s+2}(R)$	……	$d_{S-1}(R)$	$d_S(R)$
R_b	s+1 ve üstü durumlarda S durumuna geçiş yap	K	K-1	K-2		2	1	0	0	0	0	0

Tablo 2: (R,s,S) Stok Politikası için Belirlenen Kararlara ait Hareketler

Karar $d_i(R)$	Hareket $a \in A_i$
0	Hiç sipariş verme
1	S-s birim sipariş ver
2	S-s+1 birim sipariş ver
...	...
K-2	S-2 birim sipariş ver
K-1	S-1 birim sipariş ver
K	S birim sipariş ver

2.6. Sürecin Beklenen ve Fiili Ortalama Maliyeti

Birçok politika içinden optimal olanını belirlemek için öncelikle stok maliyetine ilişkin modelin kurulması gerekmektedir.

Belli bir periyot sonra kontrol edilen bir stok varsayıldığında, yönetici o anda sipariş verilip verilmemesinin kararını verecektir. Talep dağılımının belli bir olasılık dağılımına uyduğu düşünülmüştür. Buradaki diğer varsayımlar şu şekilde olacaktır,

- Eğer talep, siparişi geçerse, müşteri başka yerden ürüne ulaşacaktır yani birikmiş talebe izin verilmeyecektir. Fakat ceza maliyetine katlanılacaktır.
- Kazançlar, maliyetler periyotlara göre farklılık göstermeyecektir.
- Stoğun kapasitesi sınırlı olacaktır.

s_t *t* periyodunun başlangıcındaki stok seviyesini, a_t *t* periyodundaki sipariş miktarını, D_t de aynı dönemdeki rassal talebi göstermektedir.

u birim bir malın sipariş maliyeti, $O(u)$ olarak tanımlandığında, bu maliyetin içinde K gibi bir sabit maliyet ve sipariş miktarı ile artan $c(u)$ gibi bir maliyet söz konusu olacaktır. Bu takdirde sipariş verildiğinde oluşacak maliyet Denklem 15'teki gibi olacaktır.

$$O(u) = \begin{cases} K + c(u), & u > 0 \\ 0 & , u = 0 \end{cases} \qquad \textbf{15}$$

u birim bir malı bir dönem boyunca elde bulundurmanın maliyeti ise; $h(u)$ olarak gösterilir.

Talep meydana geldiğinde eldeki stok yeterli değilse, işletme yönünde stok tükenme veya bulundurmama maliyeti adı verilen bir maliyet ortaya çıkacaktır. Bu maliyet talebin bekletilmesine veya talebin başka yerden karşılanmasına sebep olacaktır (Öztürk, 2004: 491). Çalışmada esas alınan stok tükenme maliyeti, talebin başka yerden karşılanması durumunu içermektedir bu da birim başına değişken bir maliyet olarak ele alınmıştır. Hemen belirtmek gerekir ki alıcı ile yapılan bir anlaşmaya göre, alıcının talebini karşılayamamaya ödenen ceza maliyeti de bu maliyetin içinde yer almaktadır.

Sonuçta tüm bu maliyetler, $X_n\, ve\, \xi_{n+1}$'in bir fonksiyonu olacaktır. Bu takdirde sistemin geneline ait *"birim zamanda beklenen ortalama maliyet"* bir önceki bölümde belirli bir andaki maliyeti ifade eden Denklem 14'ün sonucundan Denklem 16'daki şeklini alacaktır. Aynı şekilde *"birim zamanda ortalama fiili maliyet"* de Denklem 16 ile ifade edilebilir (Hillier ve Liberman, 2001: 816).

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t, \xi_{t+1})\right] = \sum_{j=0}^{S} k(j)\pi_j \qquad \textbf{16}$$

$$k(j) = E\left[C(X_t, \xi_{t+1})\right] \qquad \textbf{17}$$

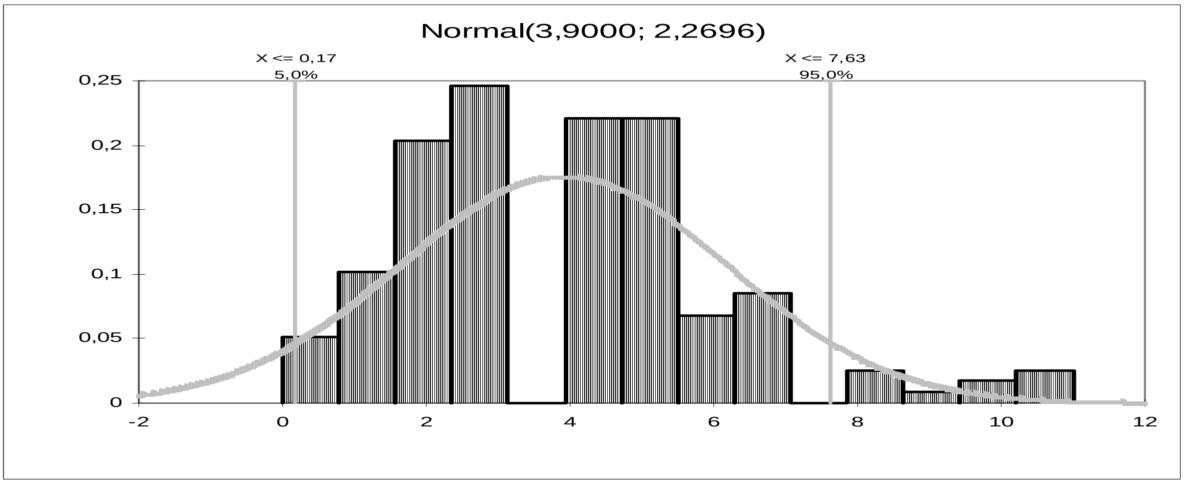
Denklem 17'deki ifade her X_t durumunun ξ_{n+1} talebi gerçekleştiğinde oluşan beklenen maliyetini göstermektedir. Denklem 14'deki $r_t(i,a,j)$ ifadesi de bununla aynı anlamı taşır. Bu denklemde; sipariş maliyeti, elde bulundurma maliyeti ve stok tükenme maliyeti ayrı ayrı hesaplanmalıdır, ayrıntılı açıklama bir sonraki bölümde yapılmıştır.

3. UYGULAMA

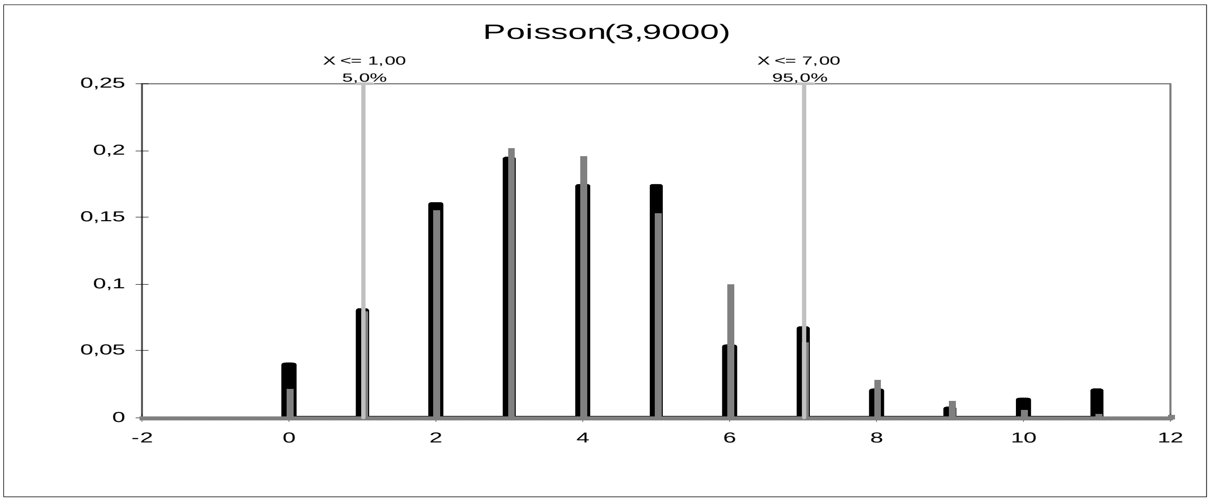
Yapılan çalışmada, Türkiye'de poliüretan sistemlerin üretimini yapan ve bu sistemleri ihraç eden uluslar arası bir firmaya ait MDI (Metilendifenil Diizosiyanat) hammaddesi incelenmiştir. MDI, poliüretanın hammaddesidir ve dünyadaki üretimi sınırlıdır. Çalışmada; MDI stok kalemine ait (R,s,S) politikası, Markov karar süreci olarak tanımlanmış, Markov zinciri özelliği kullanılarak da haftalık fiilî maliyet ortaya konmuştur. Ardından da firmanın kullandığı (R,S) politikası aynı işlemlerden geçirilerek, iki politika maliyetleri açısından karşılaştırılmıştır.

MDI hammaddesi Almanya ve Macaristan'dan ithal edilmektedir ve bozulabilme olasılığı çok yüksek olduğundan emniyet stoğu kullanılamamaktadır. MDI kilogram cinsinden fiyatlandırılıp satılmasına karşın ithal hammadde olduğundan siparişi konteyner cinsinden verilmektedir. Bir konteyner yaklaşık 65 varil almaktadır, bir varil ise 225 kg. MDI içermektedir, böylece bir konteyner 14.625 kg. MDI içerir. Stok modelinin Markov zinciri özelliği gösterebilmesi açısından, durumlar; kg. cinsinden değil, konteyner cinsinden oluşturulmuştur, aksi takdirde kesikli durum uzayı söz konusu olmayacaktır, bu sebeple bir konteyner, bir durum olarak kabul edilmiştir. Firmanın stoğundaki MDI'yı sürekli kontrol etmesi mümkün olmadığından stok, periyodik gözden geçirme ile kontrol edilmektedir. Kontrol esnasında hangi durumda (X_n) olunduğunun tespiti, kontrolü yapılan stok düzeyinin; 14.625 kg. 'a bölünmesi ve bir üst tam sayıya yuvarlanmasıyla gerçekleştirilir. Aynı şekilde siparişler de konteyner cinsinden verileceğinden bu şekilde bir hesaplama yanlış olmayacaktır. Tablo 4'de durumlara ait detaylı açıklama görülebilmektedir.

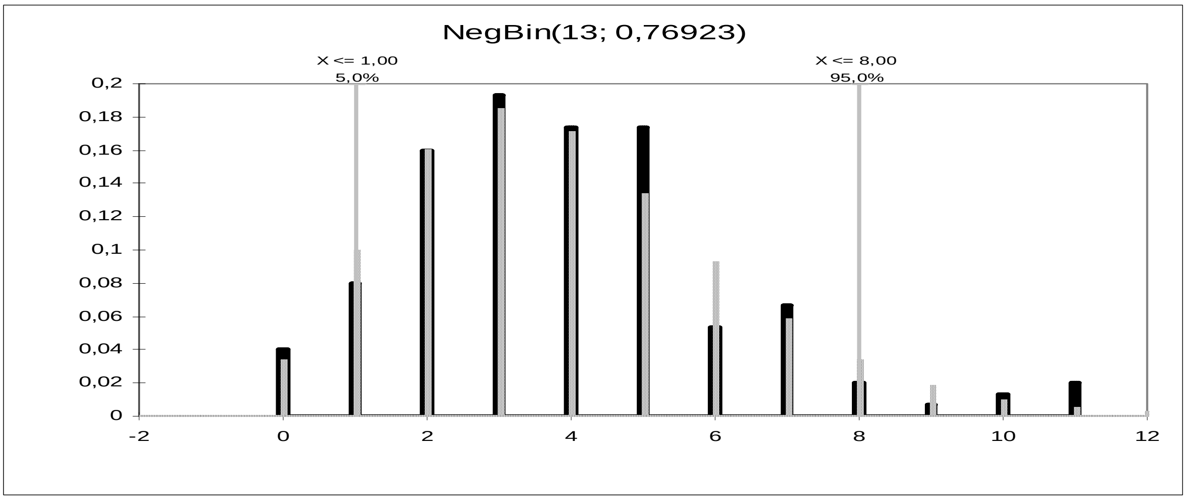
Firmada her bölüm için ayrı bir depo bulunmaktadır. Örneğin sevkiyat bölümünün deposuna giren MDI, üretime girmeden önce üretim bölümünün talebi doğrultusunda, iş emri formları aracılığıyla üretimin deposuna alınmakta ve oradan hemen üretime girmektedir. Çalışmada, müşteri olarak üretim bölümü düşünülerek, son 3 yıla ait üretimin talep verileri alınmıştır. Bu talep verileri de durum olarak ifade edilen eldeki stok gibi 14.625 kg.'a bölünmüş ve dağılımının özelliği tespit edilmiştir. Dağılımın Poisson özelliği gösterdiği Şekil 2, Şekil 3 ve Şekil 4'ten açıkça görülmektedir. Dağılımın ortalaması $\lambda = 3,9$; standart sapması $\sigma = 1,9748$; varyansı $\sigma^2 = 3,9$'dur. Poisson'a uyan haftalık talep miktarlarının gerçekleşme olasılıkları Tablo 3'te gösterilmiştir.



Şekil 2: Talep Dağılımının Normal Dağılım ile Gösterimi



Şekil 3: Talep Dağılımının Poisson Dağılımı ile Gösterimi



Şekil 4: Talep Dağılımının Negatif Binom Dağılımı ile Gösterimi

Tablo 3: MDI Hammaddesine Olan Haftalık Talebin Olasılık Dağılımı

Talep Adedi (Koli)	Olasılığı
0	0,0400
1	0,0800
2	0,1600
3	0,1933
4	0,1733
5	0,1733
6	0,0530
7	0,0670
5 ve üstü	0,3534
6 ve üstü	0,1801
7 ve üstü	0,1271
8 ve üstü	0,0601

3.1. (R,s,S) Stok Kontrol Politikası (R_b)

Firmanın mevcut kullandığı rakamlar bozulmadan, (R,s,S) stok kontrol politikasına (R_b) göre; en yüksek stok düzeyi *S'i* 7 konteyner ve sipariş noktası *s'yi* ise 4 konteyner olarak belirlemiştir. Stok düzeyinin kontrolleri haftalık olarak yapılmaktadır (R=1). Bu politikaya ait, Tablo 2'de yapılmış olan durumlara ve kararlara ait açıklama temel alınarak firmanın stok politikası özel biçimiyle Tablo 4'te gösterilmiştir.

Taleplerin gerçekleşme olasılıkları baz alınarak kurulan stok düzeylerinin haftalık değişimini gösteren geçiş matrisi Şekil 5 'deki gibi oluşacaktır. Burada dikkat edilecek olursa ilk beş durumdan diğer durumlara geçiş olasılıkları sabittir bu da modeldeki sipariş yapısından kaynaklanmaktadır.

Tablo 4:Örneğe ait (R,s,S) Stok Kontrol Politikasının (R_b) Açıklamaları

Durum	Stok Miktarı (kg)	Karar $d_i(R)$	Hareket $a \in A_i$	Hareketin Açıklaması
0	0< X≤14.625	5	S-s+4 (7) konteyner	102.375 kg. sipariş ver
1	14.625<X ≤29.250	4	S-s+3 (6) konteyner	87.750 kg. sipariş ver
2	29.250<X≤43.875	3	S-s+2 (5) konteyner	73.125 kg. sipariş ver
3	43.875<X≤58.500	2	S-s+1 (4) konteyner	58.500 kg. sipariş ver
4	58.500<X≤73.125	1	S-s (3) konteyner	43.875 kg. sipariş ver
5	73.125<X≤87.750	0	0 konteyner	0 kg. sipariş ver
6	87.750<X≤102.375	0	0 konteyner	0 kg. sipariş ver
7	102.375<X≤117.000	0	0 konteyner	0 kg. sipariş ver

$$P = \begin{pmatrix} 0,1271 & 0,053 & 0,1733 & 0,1733 & 0,1933 & 0,16 & 0,08 & 0,04 \\ 0,1271 & 0,053 & 0,1733 & 0,1733 & 0,1933 & 0,16 & 0,08 & 0,04 \\ 0,1271 & 0,053 & 0,1733 & 0,1733 & 0,1933 & 0,16 & 0,08 & 0,04 \\ 0,1271 & 0,053 & 0,1733 & 0,1733 & 0,1933 & 0,16 & 0,08 & 0,04 \\ 0,1271 & 0,053 & 0,1733 & 0,1733 & 0,1933 & 0,16 & 0,08 & 0,04 \\ 0,3534 & 0,1733 & 0,1933 & 0,16 & 0,08 & 0,04 & 0 & 0 \\ 0,1801 & 0,1733 & 0,1733 & 0,1933 & 0,16 & 0,08 & 0,04 & 0 \\ 0,1271 & 0,053 & 0,1733 & 0,1733 & 0,1933 & 0,16 & 0,08 & 0,04 \end{pmatrix}$$

Şekil 5: (R,s,S) Stok Politikasına Göre Bir Periyotlu Geçiş Matrisi

Denklem 12 ve Denklem 13 birlikte çözüldüğünde ise sistemin kararlı hali olan π 'ye ulaşılmış olacaktır.

$$\pi = [0,161871; 0,077592; 0,176062; 0,172789; 0,175443; 0,138122; 0,066298; 0,031823]$$

MDI hammaddesinden sipariş verildiğinde oluşacak maliyeti; 9.375 Avro sabit ve konteyner başına da 51.188 Avro'ya mal olduğudur. O takdirde Denklem 15 tekrar yazılırsa sipariş verildiğinde oluşacak maliyet;

$$O(u) = \begin{cases} 9.375 + 51.188(u), & u > 0 \\ 0, & u = 0 \end{cases}$$

şeklini alacaktır. İmalata verilemeyen her bir konteynerlik MDI ise poliüretan sistemin zamanında yetişmemesine sebep olacağından 96.525 Avro'luk tükenme maliyetine neden olmaktadır. Elde bulundurma maliyeti ise dikkate alınmayacak kadar küçüktür bu sebeple elde bulundurma maliyeti, toplam maliyet fonksiyonunda yer almamaktadır. O takdirde politika R_b 'nin $n+1$ haftasındaki toplam maliyeti aşağıda gösterildiği gibi olacaktır:

$$C(X_t,\xi_{t+1}) = \begin{cases} 9.375 + 51.188(u) + 96.525\max\{\xi_{t+1} - S, 0\} & 0 \le X_t \le s \\ 96.525\max\{\xi_{t+1} - X_t, 0\} & s+1 \le X_t \le S \end{cases} \qquad \mathbf{18}$$

Denklem 16'ya göre, X_t durumundaki sistemin beklenen veya fiili maliyetini bulmak için gerekli olan ve Denklem 17'de açılımı gösterilen $k(X_t)$ ve $k(0)$ aşağıdaki şekilde bulunur:

$$k(X_t) = E\left[C(X_t,\xi_{t+1})\right]$$

$$k(0) = E\left[C(0,\xi_{t+1})\right]$$

$$= 9.375 + 51.188(7) + 96.525E\left(\max\{\xi_{t+1} - S, 0\}\right)$$

Sipariş verilip stok düzeyi 7 palete çıkarıldığında tükenme maliyetinin oluşması için talebin, stok üst düzeyinden yüksek olması yani 8 ve üstü olması gereklidir, firmadan alınan verilerin dağılımında da 8 ve üstü talep olma olasılığını bilmek, dönem başında sıfır olan bir stoğa ait beklenen tükenme maliyetini verecektir. Böylece Tablo 3'deki olasılıklardan sıfır stokla başlanan dönemin beklenen maliyeti;

$$k(0) = E\left[C(0,\xi_{t+1})\right] = 9.375 + 51.188(7) + 96.525(0,06)$$

$$= 373.482,5\ Avro$$

olacaktır.

Stok politikasının (R,s,S) olmasından dolayı $X_t = 0,1,2,3,4$ için beklenen tükenme maliyetinin eşit olduğu aşikardır.

Stok politikasının (R,s,S) olmasından dolayı $X_t = 0,1,2,3,4$ için beklenen tükenme maliyetinin eşit olduğu aşikardır.

$$k(1) = E\left[C(1,\xi_{t+1})\right] = 9.375 + 51.188(6) + 96.525(0,06)$$

$$= 322.294,5\ Avro$$

$$k(2) = E\left[C(2,\xi_{t+1})\right] = 9.375 + 51.188(5) + 96.525(0,06)$$

$$= 271.106,5\ Avro$$

$$k(3) = E\left[C(3,\xi_{t+1})\right] = 9.375 + 51.188(4) + 96.525(0,06)$$

$$= 219.918,5\ Avro$$

$$k(4) = E\left[C(4,\xi_{t+1})\right] = 9.375 + 51.188(3) + 96.525(0,06)$$

$$= 168.730,5\ Avro$$

$s+1$ stok düzeyinden sonra sipariş verilmeyeceğinden, maliyet fonksiyonu sadece tükenme maliyetinden oluşacaktır.

$$k(5) = E\left[C(5,\xi_{t+1})\right] = 96.525E\left(\max\{\xi_{t+1} - 5, 0\}\right)$$

$$= 96.525 * 0,1801 = 17384,2\ Avro$$

$$k(6) = E\left[C(6,\xi_{t+1})\right] = 96.525E\left(\max\{\xi_{t+1}-6,0\}\right)$$
$$= 96.525 * 0,1271 = 12.268,3\,Avro$$
$$k(7) = E\left[C(7,\xi_{t+1})\right] = 96.525E\left(\max\{\xi_{t+1}-7,0\}\right)$$
$$= 96.525 * 0,06 = 5791,5\,Avro$$

Haftalık beklenen ve fiili toplam maliyet ise, Denklem 16'dan hesap edilirse 204.196 Avro olacaktır. Bu değer, (R,s,S) stok politikasını kullanan firmanın haftalık ortalama MDI hammaddesine ait maliyetidir.

$$\sum_{j=0}^{7} k(j)\pi_j = 204.195{,}9$$

3.2. (R,S) Stok Kontrol Politikası (R_a)

Firmanın mevcut sisteminde kullandığı stok politikası (R,S) Tablo 5'de gösterilmiş ve R_a politikası olarak ifade edilmiştir. Bu politikanın kararlı hal yapısının (π), ilk geçiş matrisine (P)denk olacağı açıktır çünkü her stok düzeyinde sipariş verilecektir ve stok düzeyi S 'ye kadar yani yedi birime çıkarılacaktır ve bir R sürelik dönem sonundaki stok düzeyini de S'den eksilen talep belirleyecektir. Bu da dönemin başında stok hangi düzeyde olursa olsun, hep sipariş verilecek ve bir sonraki stok düzeyi X_n değerinin olma olasılığı hep aynı olacaktır. Yani fonksiyon sadece talepten etkilenecektir. Bu sebeple Denklem 12 ve 13'ün çözülmesine gerek duyulmayacaktır. Sadece Tablo 3 'deki bilinen olasık dağılımlarının kullanılması yeterlidir.

$$\pi = \left[0{,}1271; 0{,}053; 0{,}1733; 0{,}1733; 0{,}1933; 0{,}16; 0{,}08; 0{,}04\right]$$

Politika R_a'nın $n+1$ haftasındaki maliyeti ise Denklem 19'daki gibi olacaktır.

$$C(X_t,\xi_{t+1}) = 9.375 + 51.188(u) + 96.525\max\{\xi_{t+1}-7,0\}$$
$$0 \le X_t \le 7 \qquad \textbf{19}$$

Bu politikada tükenme maliyetleri her X_t durumu için, talebin sekiz adet ve üstü olması durumunda gerçekleşeceğinden eşittir. Bu takdirde, $k(X_t)$ yani X_t durumu için beklenen maliyet aşağıdaki şekilde olacaktır. $X_t = 0,1,2,3,4$ için iki politikanın da $k(X_t)$ 'leri eşit olacaktır.

$$k(X_t) = E\left[C(X_t,\xi_{t+1})\right] = O(u) + 96.525E\left(\max\{\xi_{t+1}-7,0\}\right)$$
$$k(0) = E\left[C(0,\xi_{t+1})\right] = 9.375 + 51.188(7) + 96.525(0,06)$$
$$= 373.482,5\,Avro$$

$$k(1) = E\left[C(1,\xi_{t+1})\right] = 9.375 + 51.188(6) + 96.525(0,06)$$
$$= 322.294,5\,Avro$$

$$k(2) = E\left[C(2,\xi_{t+1})\right] = 9.375 + 51.188(5) + 96.525(0,06)$$
$$= 271.106,5\,Avro$$

$$k(3) = E\left[C(3,\xi_{t+1})\right] = 9.375 + 51.188(4) + 96.525(0,06)$$
$$= 219.918,5\,Avro$$

$$k(4) = E\left[C(4,\xi_{t+1})\right] = 9.375 + 51.188(3) + 96.525(0,06)$$
$$= 168.730,5\,Avro$$

$$k(5) = E\left[C(5,\xi_{t+1})\right] = 9.375 + 51.188(2) + 96.525(0,06)$$
$$= 117.542,5\,Avro$$

$$k(6) = E\left[C(6,\xi_{t+1})\right] = 9.375 + 51.188(1) + 96.525(0,06)$$
$$= 66.354,5\,Avro$$

$$k(7) = E\left[C(7,\xi_{t+1})\right] = 96.525E\left(\max\{\xi_{t+1}-7,0\}\right)$$
$$= 96.525 * 0,06 = 5791,5\,Avro$$

Haftalık beklenen ve fiili toplam maliyet Denklem 16'dan hesaplanarak 206.608 Avro olarak bulunmuştur.

$$\sum_{j=0}^{7} k(j)\pi_j = 206.608{,}3$$

Tablo 5: Örneğe ait (R,S) Stok Kontrol Politikasının (R_a) Açıklamaları

Durum	Stok Miktarı (kg)	Karar $d_i(R)$	Hareket $a \in A_i$ (S-Xt)	Hareketin Açıklaması
0	0< X≤14.625	5	7 konteyner	102.375 kg. sipariş ver
1	14.625<X ≤29.250	4	6 konteyner	87.750 kg. sipariş ver
2	29.250<X≤43.875	3	5 konteyner	73.125 kg. sipariş ver
3	43.875<X≤58.500	2	4 konteyner	58.500 kg. sipariş ver
4	58.500<X≤73.125	1c	3 konteyner	43.875 kg. sipariş ver
5	73.125<X≤87.750	1b	2 konteyner	29.250 kg. sipariş ver
6	87.750<X≤102.375	1a	1 konteyner	14.625 kg. sipariş ver
7	102.375<X≤117.000	0	0 konteyner	0 kg. sipariş ver

SONUÇ ve ÖNERİLER

Markov zinciri ve karar süreci, literatürde; işletme, eğitim, pazarlama, finans, sosyoloji, meteoroloji ve hidroloji gibi bir çok bilime çalışma konusu olmuştur. İşletmecilikte özellikle, çok aşamalı üretim sistemlerinin incelenmesi, tamir bakım planlaması, stok kontrol sistemleri, üretim programlama ve çizelgeleme gibi bir çok farklı alt konuda Markov analizi uygulamalarına rastlamak mümkün olmaktadır. Üretim yönetimi içerisinde önemli bir yer teşkil eden stok kontrolü konusunda yapılan çalışmalarsa; yeniden sipariş noktasının belirlenmesi, periyot süresinin belirlenmesi veya yeni bir stok kontrol modeli kurulması yönünde olmuştur.

Bu çalışmada ise, periyodik gözden geçirme tekniğine dayalı iki olasılıklı stok kontrol modeli incelenerek modeller, maliyetleri açısından kıyaslanmıştır. Bu kıyaslama yapılırken, talep dağılımından yola çıkılarak iki modelin de Markov zinciri özelliği gösterdiği ispatlanmıştır. Geçiş matrisleri belirlendikten sonra stoğa ait maliyetler tek tek incelenmiş ve uygulamaya konu olan firmaya yönelik maliyet fonksiyonu üretilerek Markov karar süreci tanımlanmıştır. Özellikle stok tükenme veya ceza maliyetinin etkisi incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda görülen odur ki; poliüretan sistemler üreten firmanın MDI hammaddesinin stok kontrolünde, (R,s,S) modeli (R,S) modeline göre daha uygun sonuç vermektedir. Çalışmanın amacı bu iki yöntemi kıyaslamak olduğundan, karar problemi hangi yöntemin tercih edileceğine yönelik olmuş ve ayrıntılı sayma yöntemi kullanılarak sonuca gidilmiştir, daha çok politikanın olduğu veya amacın politikaların karşılaştırılması değil de yeni bir optimum politika oluşturulması olduğu durumlarda, stokastik dinamik programlama ile çözüm daha kısa ve doğru olacaktır. Çalışmadaki bir başka konuysa maliyetlerin ele alınmasıdır. Stok maliyeti olarak elde bulundurma maliyeti dikkate alınmamıştır. Elde bulundurma maliyetinin varlığı durumunda bu iki yöntem arasındaki maliyet farkının daha da açılacağı aşikârdır. Çalışmanın amacından sapmamak maksadıyla sipariş periyodunun ve üst düzey stok miktarının optimizasyonu çalışmanın dışında bırakılmış; rakamlar firmanın mevcut sistemindeki şekliyle kullanılmıştır. Böyle bir çalışmaya gidildiğindeyse yüksek S değerleri için tükenme maliyeti sıfıra yaklaşırken sipariş maliyetlerinde artış görülecektir. Aynı şekilde maliyet farkı daha da açılacaktır. Sipariş noktası s'nin değişimi ise ancak (R,s,S) politikasını etkileyecektir; aşağı çekildiği takdirde tükenme maliyeti artacak, yukarı çekilirse de sipariş maliyeti artarak model (R,S) politikasına yaklaşacaktır.

KAYNAKÇA

1. BARAY, Alp, Kasım 1993, *"Bulanık Kümeler Kuramı ve İşletme Uygulamaları"*, ***İ.Ü. İşletme Fakültesi Dergisi,*** Cilt: 22, Sayı: 2, s. 2.
2. BUCHAN, J., KOENIGSBERG, E., 1966, **Scientific Inventory Management,** New Delhi, Prentice-Hall of India Private Limited.
3. DAYAR, Tuğrul, 1994, "**Stability and Conditioning Issues On The Numerical Solution Of Markov Chains**", Doktora Tezi, North Carolina State University.
4. DOOB, J.L., 1990, **Stochastic Processes**, Canada, A Wiley-Interscience Publication, Wiley Classic Library Edition.
5. EHRHARDT, R., 1979, *"The Power Approximation for Computing (s,S) Inventory Policies"*, ***Management Science***, Volume: 30-5, s: 777-786.
6. EHRHARDT, R., 1984, *"(s,S) Policies for a Dynamic Inventory Model with Stochastic Lead Times"*, ***Operations Research*,** Volume: 32-1, s: 121-132.
7. HILLIER, Frederick S., LIEBERMAN Gerald J., 2001, **Introduction to Operation Research**, United States of America, The McGraw-Hill Companies , Seventh Edition.
8. MEDHI, J., 2003, **Stochastic Models in Queueing Theory,** United States of America, Academic Press, Elsevier Science, Second Edition.
9. YIN, K. Karen, LIU, Hu ve JOHNSON, Neil E., 2002, *"Markovian Inventory Policy with Application to the Paper Industry"*, ***Computers and Chemical Engineering,*** Volume: 26, s: 1399-1413.
10. PAPOULIS, A., 1984, **Probability, Random Variables and Stochastic Processes**, New York, McGraw Hill, Second Edition.
11. PUTERMAN, Martin L., 1994, **Markov Decision Processes : Discrete Stochastic Dynamic Programming,** United States of America, A Wiley Interscience Publication.
12. ROSS, Sheldon M., 2003, **Introduction to Probability Models,** United States of America, Academic Press, Elsevier Science, Eighth Edition.
13. SALDANA, Rafael P., CHANGHO, Marco Carlo C., *"On Random Walk Models and Markov Chains"*, ***Proceedings of the Philippine Computing Science Congress***, 2000, s. 204.

14. SCHNEIDER, H., 1978, *"Methods for Determining the Re-Order Point of an (s,S) Ordering Policy When a Service Level is Specified"*, ***Journal of the Operation Research Society***, Volume: 29(12), s: 1181-1193.
15. SILVER, Edward A, PYKE, David F. ve PETERSON, Rein, 1998, **Inventory Management and Production Planning and Scheduling**, United States of America, John Wiley & Sons, Third Edition.
16. TAHA, A. Hamdy, Ekim 2002, **Yöneylem Araştırması**, 6. Basımdan Çev. Ş. Alp Baray – Şakir Esnaf, İstanbul, Literatür Yayıncılık.
17. TAYLOR, Howard M., KARLIN Samuel, 1984, **An Introduction To Stochastic Modeling**, Orlando, Florida, Academic Press, Inc.
18. ÖZTÜRK, Ahmet, 2004, **Yöneylem Araştırması**, Bursa, Ekin Kitabevi.
19. WILSON, R.H., 1934, *"A Scientific Routine for Stock Control"*, ***Harvard Business Review***, 13.
20. WINSTON, Wayne L., 2004, **Operation Research: Application and Algorithms**, Canada, Thomson Brooks / Cole , Fourth Edition.
21. ZHENG, Yu-Sheng, FEDERGRUEN, A., Jul/Aug. 1991, *"Finding Optimal (s,S) Policies is About as Simple as Evaluating a Single Policy"*, ***Operations Research,*** Volume: 39-4, s: 654-665.